

Universidad Nacional de San Luis (UNSL)

Facultad de Ciencias Físico Matemática y Naturales (FCFMyN)

Departamento de Matemática / Grupo de Teoría Algebraica de Grafos (TAG UNSL)

**Tesis para aspirar al grado de:
Licenciada en Ciencias Matemáticas**

Hamiltonicidad de Grafos Estables de Kneser

Tesis presentada por: Agustina Victoria Ledezma

dirigida por: Dr. Adrián Pastine

Índice general

1. Introducción al Problema	5
2. Preliminares	6
2.1. Grafo	6
2.2. Caminata - Sendero - Camino - Circuito - Ciclo	7
2.3. Subgrafo - Generador - Inducido	8
2.4. Distancia - Diametro - Cintura	8
2.5. Conjunto Independiente - Coloreo	9
2.6. Isomorfismo - Automorfismo	10
3. Grafos de Kneser y Estables de Kneser	11
3.1. Grafo de Kneser	11
3.2. Grafo estable de Kneser	13
4. Ejemplos	15
4.1. Grafo estable de Kneser $K_{stab}(4, 1)$	15
4.2. Grafo estable de Kneser $K_{stab}(6, 2)$	16
4.3. Grafo estable de Kneser $K_{stab}(8, 3)$	17
5. Resultados Principales	19
5.1. Caracterización de los vértices	19
5.2. Distancia entre bloques	20
5.3. Observaciones	20
5.4. Ciclos de Hamilton por categorías	21
5.5. Conexiones entre clases	24
5.6. Ciclo de Hamilton en $K_{stab}(2k + 2, k)$	26
6. Otras Observaciones	28
7. Conclusiones	30

Índice de figuras

2.1.	Grafo G .	6
2.2.	Grafo completo, y bipartito completo.	7
2.3.	Caminatas, senderos, caminos, circuitos y ciclos.	8
2.4.	Subgrafos.	8
2.5.	Niveles de distancia desde el vértice r .	9
2.6.	2-coloreo de G .	10
2.7.	Isomorfismo de G en H y automorfismo de G .	10
3.1.	Grafo $K(5, 2)$.	11
3.2.	Grafo $K(4, 2)$.	12
3.3.	Grafo $K_{stab}(5, 2)$.	13
3.4.	Grafos estables de Kneser.	14
4.1.	Grilla del vértice $\{1, 3, 6\}$.	15
4.2.	Grafo $K_{stab}(4, 1)$.	16
4.3.	Grafo $K_{stab}(6, 2)$.	17
4.4.	Grafo $K_{stab}(8, 3)$.	18
5.1.	Grilla del vértice $\{1, 3, 6, 9\}$.	20
5.2.	Grillas de los vértices v_1 , y v_2 .	22
5.3.	Subgrafo de $K_{stab}(2k + 2, k)$ inducido por $v_1, v_2, r(v_1)$ y $r(v_2)$.	22
5.4.	Vértice en $B3$ y su vecino en $B2D1$.	24
5.5.	Vértice en $B2D1$ y su vecino en $B2D3$.	24
5.6.	Vértice en $B2D3$ y su vecino en $B2D5$.	26
5.7.	Vértice en $B2Dm$ y su vecino en $B2Dm + 2$.	26
6.1.	Grafo $K_{stab}(n, k)$ con $n \geq 2k + 3$.	29

Índice de cuadros

4.1. Construcción de $K_{stab}(4, 1)$	15
4.2. Construcción de $K_{stab}(6, 2)$	16
4.3. Construcción de $K_{stab}(8, 3)$	17

Capítulo 1

Introducción al Problema

Los grafos son estructuras combinatorias que estudian relaciones binarias. Son de interés por sus aplicaciones en diversas áreas, tanto matemáticas (álgebra, combinatoria) como no matemáticas (informática, química, sociología).

En este trabajo estudiamos los grafos de Kneser, que representan los subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n y la relación de ser disjuntos.

En particular, estudiamos los subgrafos estables de Kneser, que se obtienen al eliminar ciertos vértices. Para determinados parámetros demostramos que el grafo estable tiene un ciclo de Hamilton, esto es, que se pueden recorrer todos los vértices del grafo, volviendo al vértice de partida, y sin haber pasado nunca dos veces por el mismo vértice. Además, en estos casos, damos una descripción precisa del grafo.

Este trabajo está compuesto de la siguiente manera. En el capítulo 2 damos las nociones preliminares del campo de la teoría de grafos, necesarios para el buen entendimiento del resto de los capítulos. En el capítulo 3 damos una introducción a los grafos de Kneser y los grafos estables de Kneser, incluyendo además, los principales resultados en el área, y con algunos ejemplos. El capítulo 4 brindamos ejemplos más detallados de los grafos estables de Kneser, en los cuales yace la idea principal del problema y su demostración. El capítulo 5 contiene los resultados principales del trabajo. Luego, en el capítulo 6 damos otras observaciones al respecto, y finalmente en el capítulo 7 damos una conclusión a este trabajo y planteamos algunos posibles trabajos futuros.

Cabe destacar que todos los resultados del Capítulo 5 son originales.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introducimos las nociones básicas necesarias para desarrollar y comprender nuestro trabajo. En particular damos las definiciones de caminata, sendero, camino, circuito, ciclo, ciclo de Hamilton, subgrafo, subgrafo generador e inducido, distancia, diámetro, cintura, conjunto independiente, coloreo, isomorfismo, y automorfismo.

2.1. Grafo

Un *grafo* G es un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, junto con un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos llamados aristas. El conjunto de vértices de G se denota por $V(G)$, y el conjunto de aristas por $E(G)$.

La arista $e = \{u, v\}$ *conecta* los vértices u y v . Si $e = \{u, v\}$ es una arista del grafo G , entonces u y v son vértices *adyacentes*, mientras que u y e son *incidentes* al igual que v y e . Es conveniente, sin embargo, denotar una arista por uv o vu en lugar de $\{u, v\}$.

La cardinalidad del conjunto de vértices de un grafo G es llamado el *orden* de G . La cardinalidad del conjunto de aristas de un grafo G es llamado el *tamaño* de G .

Se acostumbra definir o describir un grafo por medio de un diagrama en el cual cada vértice es representado por un punto (dibujado como un círculo pequeño) y cada arista $e = uv$ es representada por un segmento recto o curvo uniendo los puntos correspondientes a u y v .

Por ejemplo, el grafo G definido por los conjuntos $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ donde $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_2v_3$, $e_4 = v_2v_4$, $e_5 = v_4v_5$ tiene orden 5, y tamaño 5. Un diagrama de este grafo se muestra en la Figura 2.1.

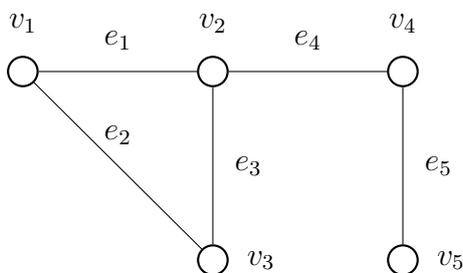


Figura 2.1: Grafo G .

El grado de un vértice v en un grafo G es el número de aristas de G incidentes con v ,

el cual se denota por $deg_G v$ o simplemente $deg v$ si G es claro del contexto.

En el grafo de la Figura 2.1, vemos que $deg v_1 = 2$, $deg v_2 = 3$, $deg v_3 = 2$, $deg v_4 = 2$ y $deg v_5 = 1$.

Un grafo G es *regular de grado r* si $deg v = r$ para cada vértice v de G .

Un grafo con n vértices es *completo* si cualquier par de sus vértices, es conectado por una arista. Denotamos este grafo por K_n .

Un grafo G es *k -partito completo*, $k \geq 1$, si es posible particionar $V(G)$ en k subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_k , tal que todo elemento de $E(G)$ une un vértice de V_i a un vértice de V_j , $i \neq j$ y además si $u \in V_i$, y $v \in V_j$, $i \neq j$, entonces $uv \in E(G)$. Si $|V_i| = n_i$, entonces el grafo es denotado por K_{n_1, n_2, \dots, n_k} . El orden en el cual los números n_1, n_2, \dots, n_k son escritos no es importante. Para $k = 2$ tal grafo es llamado *bipartito completo*.

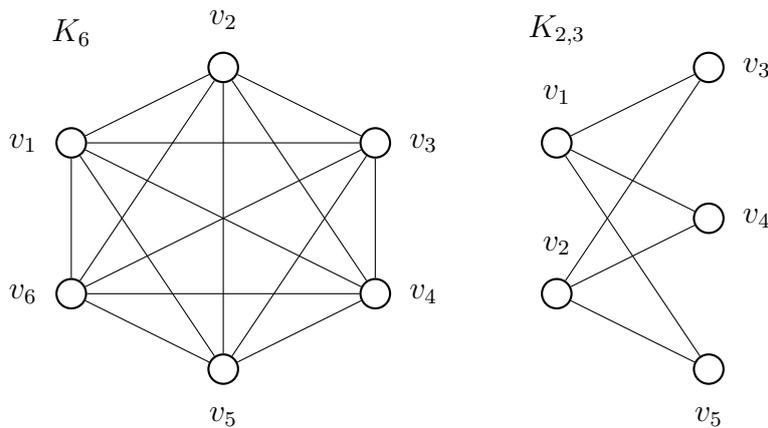


Figura 2.2: Grafo completo, y bipartito completo.

2.2. Caminata - Sendero - Camino - Circuito - Ciclo

Sean u y v dos vértices (no necesariamente distintos) de un grafo G , una $u-v$ *caminata* (*walk*) de G es una secuencia finita y alternada $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$ de vértices y aristas, comenzando en el vértice u y terminando en el vértice v , tal que $e_i = u_{i-1}u_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$.

El número k es el *largo* de la caminata. Una caminata *trivial* no contiene aristas, esto es, $k = 0$.

Notamos que puede haber repetición de vértices y aristas en una caminata. Usualmente, solo los vértices de una caminata son indicados, ya que las aristas presentes son evidentes. Una $u-v$ caminata es *cerrada* o *abierta* dependiendo si $u = v$ o $u \neq v$. Un $u-v$ *sendero* (*trail*) es una $u-v$ caminata que no repite aristas. Un $u-v$ *camino* (*path*) es una $u-v$ caminata que no repite vértices. Un sendero no trivial y cerrado en un grafo G es un *circuito* de G . Un circuito $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ ($n \geq 3$) cuyos n vértices v_i son distintos es un *ciclo*. Es decir, un ciclo es un camino no trivial y cerrado en un grafo G . Un grafo de orden n que es un camino o un ciclo es denotado por P_n o C_n respectivamente.

A modo de ejemplo, en el grafo G de la Figura 2.3, $W_1 : v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_3, v_4$ es una $v_1 - v_4$ caminata que no es un sendero, $W_2 : v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_4$ es un $v_1 - v_4$ sendero que no es un camino, $W_3 : v_1, v_3, v_4$ es un $v_1 - v_4$ camino, $W_4 : v_2, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1, v_2$ es un circuito que no es un ciclo y $W_5 : v_2, v_4, v_3, v_5, v_2$ es un ciclo.

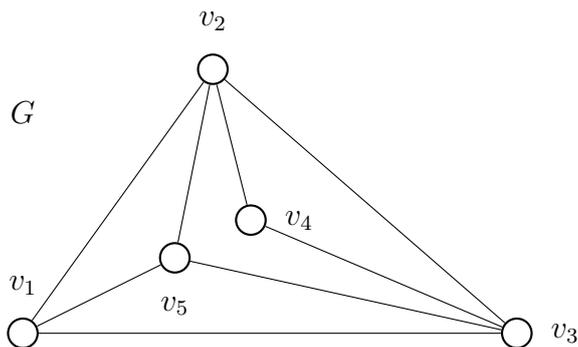


Figura 2.3: Caminatas, senderos, caminos, circuitos y ciclos.

Un *ciclo de Hamilton* de un grafo G de orden n es un ciclo $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ de largo n , donde v_1, v_2, \dots, v_n son los n vértices de G en algún orden. Luego, un grafo *hamiltoniano* o de *Hamilton* es aquel que posee un ciclo de Hamilton.

Por ejemplo, en el grafo G de la Figura 2.3, $W : v_2, v_4, v_3, v_5, v_1, v_2$ es un ciclo de Hamilton de G .

2.3. Subgrafo - Generador - Inducido

Frecuentemente, un grafo estudiado está contenido en otro grafo más grande que también está siendo analizando. Un grafo H es un *subgrafo* de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Siempre que un subgrafo H de un grafo G tenga el mismo orden que G , entonces H es llamado subgrafo *generador* de G .

Si U es un subconjunto no vacío del conjunto de vértices $V(G)$ de un grafo G , entonces el subgrafo $\langle U \rangle$ de G *inducido* por U es el grafo con conjunto de vértices U y cuyo conjunto de aristas consiste en aquellas aristas de G incidentes a dos elementos en U .

En la siguiente Figura, damos un ejemplo de un grafo G , con H y $\langle U \rangle$ subgrafos de G , donde además, H es subgrafo generador, y $\langle U \rangle$ es subgrafo inducido.

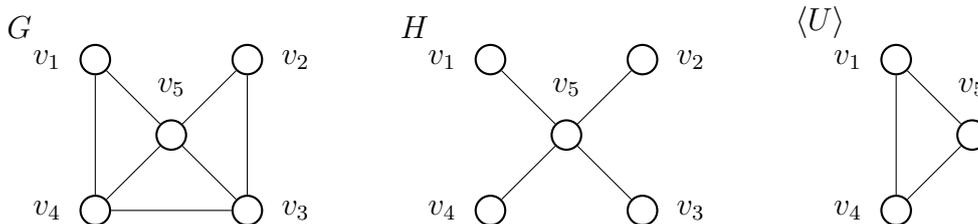


Figura 2.4: Subgrafos.

2.4. Distancia - Diametro - Cintura

Un grafo G es *conexo* si cualquier par de sus vértices es conectado por un $u - v$ camino en G . Para un grafo conexo G definimos la *distancia* $d(u, v)$ entre dos vértices u y v como la longitud del $u - v$ camino más corto en G . El *diámetro* de G , denotado por $diam G$, es la mayor de las distancias entre cualquier par de vértices de G .

Cada vértice del grafo G de la Figura 2.5 es etiquetado con su distancia desde r . El grafo G es re dibujado para ilustrar mejor estas distancias. Los vértices de G son por lo tanto particionados en niveles, de acuerdo a su distancia a r .

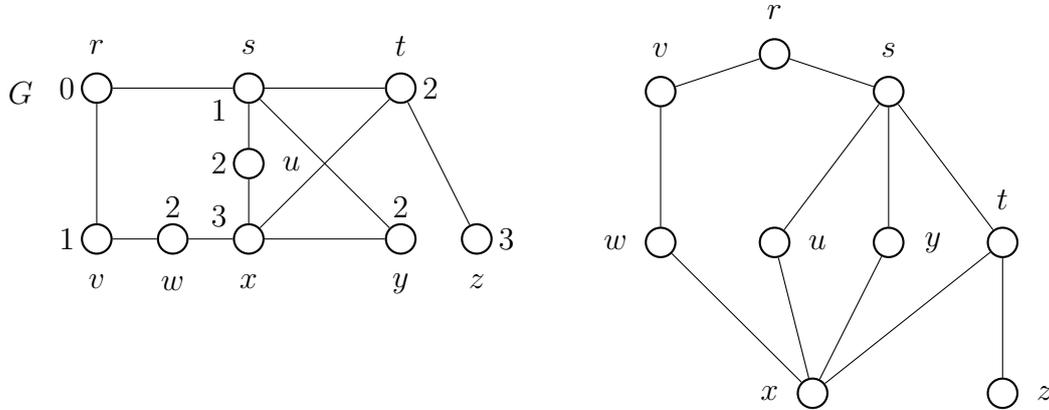


Figura 2.5: Niveles de distancia desde el vértice r .

La *cintura* (*girth*) de un grafo G , denotado por $g(G)$, es la longitud del ciclo más corto en G . En el ejemplo anterior, $g(G) = 4$.

2.5. Conjunto Independiente - Coloreo

Dos vértices en un grafo que no son adyacentes se dicen *independientes*. Un conjunto S de vértices es independiente si cada par de vértices en S es independiente. El *número de independencia*, $\alpha(G)$, de un grafo G es la cardinalidad máxima entre los conjuntos independientes de vértices en G .

En el grafo de la Figura 2.5, un conjunto independiente es $S = \{r, u, w, y, z\}$.

Sea G un grafo, un *coloreo de vértices* de G es una asignación de colores a cada uno de los vértices de G , de modo tal que a vértices adyacentes le sean asignados colores diferentes. Si los colores son elegidos de un conjunto de k colores, entonces el coloreo de vértices es llamado *k-coloreo* sin importar si los k colores son usados o no. Si G posee un k -coloreo, entonces G se dice *k-coloreable*. El menor entero k para el cual G es k -coloreable es llamado el *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$.

Alternativamente, el número cromático es igual al menor entero k , para el cual los vértices de G pueden ser particionados en k conjuntos independientes.

Sea G el grafo de la Figura 2.6. El conjunto $\{a, e\}$ es un conjunto independiente que no es subconjunto de un conjunto independiente más grande. Además, $\{b, c, d\}$ es un conjunto independiente con las misma propiedad. Luego, como el conjunto de vértices puede ser particionado en 2 subconjuntos independientes, y además este es el menor entero para el cual esto es posible, decimos que $\chi(G) = 2$.

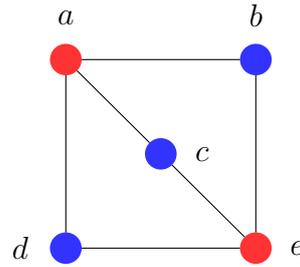


Figura 2.6: 2-coloreo de G.

2.6. Isomorfismo - Automorfismo

Dos grafos pueden tener la misma estructura, difiriendo solo en el modo en el que sus vértices y aristas son etiquetados o en el modo en el que son dibujados. Para hacer esta idea más precisa, introducimos el concepto de isomorfismo.

Un grafo G_1 es *isomorfo* a un grafo G_2 si existe un mapeo uno a uno ϕ , llamado isomorfismo, de $V(G_1)$ sobre $V(G_2)$ tal que ϕ preserva adyacencias; esto es, $uv \in E(G_1)$ si y solo si $\phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$.

Un *automorfismo* de un grafo G es un isomorfismo entre G y si mismo. Luego, un automorfismo de G es una permutación de $V(G)$ que preserva adyacencia y no adyacencia.

Por su puesto, la función identidad en $V(G)$ es un automorfismo de G. La inversa de un automorfismo de G es también un automorfismo de G, así como también la composición de dos automorfismos de G. Estas observaciones nos conducen al hecho de que el conjunto de automorfismos de un grafo G forma un grupo (bajo la operación composición) llamado el *grupo de automorfismos* de G y denotado por $\text{Aut}(G)$.

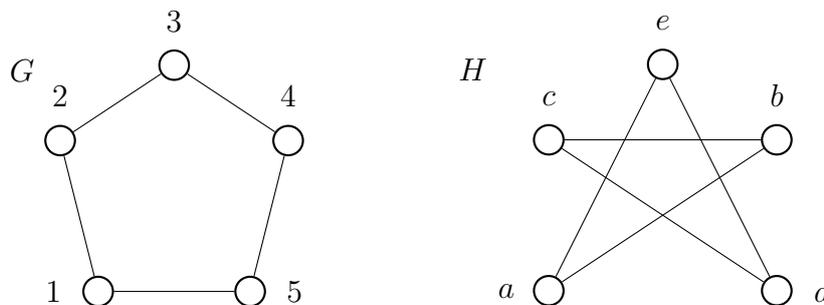


Figura 2.7: Isomorfismo de G en H y automorfismo de G.

En la figura anterior, el mapeo $\phi(1) = a$, $\phi(2) = b$, $\phi(3) = c$, $\phi(4) = d$, $\phi(5) = e$, es un isomorfismo del grafo G en el grafo H. Además, el mapeo $\psi(1) = 3$, $\psi(2) = 4$, $\psi(3) = 5$, $\psi(4) = 1$, $\psi(5) = 2$, es un automorfismo del grafo G.

Un grafo G se dice *vértice transitivo* si para todo par de vértices u y v en G existe un automorfismo ρ de G tal que $\rho(u) = v$.

Por ejemplo, los grafos C_n y K_n son vértice transitivos.

Capítulo 3

Grafos de Kneser y Estables de Kneser

3.1. Grafo de Kneser

El grafo de Kneser $K(n, k)$ con $0 < k < n$ posee el conjunto $\binom{[n]}{k} = \{S \subseteq [n] : |S| = k\}$ de todos los k -subconjuntos del n -conjunto $[n] = \{1, \dots, n\}$ como conjunto de vértices y aristas conectando vértices cuyos conjuntos son disjuntos.

El grafo de Kneser $K(n, 1)$, es el grafo completo K_n . El grafo de Kneser $K(5, 2)$, es el grafo de Petersen, ilustrado en la Figura 3.1.

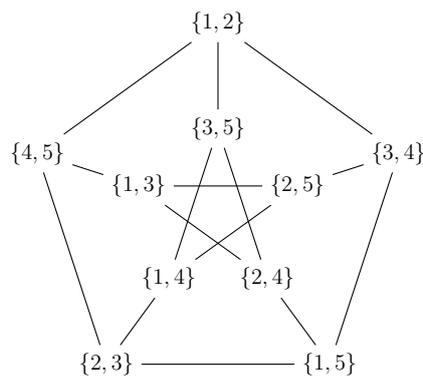


Figura 3.1: Grafo $K(5, 2)$.

El grafo de Kneser $K(n, k)$ es conexo si y solo si $n > 2k$. Si $n < 2k$, el grafo no tiene aristas, pues cualquier par de k -subconjuntos interseca en al menos un elemento, y si $n = 2k$ el grafo de Kneser está formado por k aristas disjuntas dos a dos, ya que dado un vértice, la única forma de obtener un vecino es tomando los k elementos restantes (ver Figura 3.2).

$$\{1, 2\} \text{ — } \{3, 4\}$$

$$\{1, 3\} \text{ — } \{2, 4\}$$

$$\{1, 4\} \text{ — } \{2, 3\}$$

Figura 3.2: Grafo $K(4, 2)$.

El grafo $K(2k + m, k)$, $m > 0$, posee $\binom{2k+m}{k}$ vértices. Además, dado un vértice, para obtener un vecino hay que escoger k elementos de los $2k + m - k$ restantes, por lo tanto el grafo es $\binom{k+m}{k}$ -regular.

La familia de los grafos de Kneser aparecieron por primera vez en la literatura en 1955. Algunos parámetros conocidos son su grupo de automorfismo, su diámetro y su cintura. Dos de los problemas más estudiados son encontrar su número cromático y determinar para cuales n y k son hamiltonianos. En particular, se sabe que el grafo de Petersen no es hamiltoniano.

La conjetura original de Kneser fue que el número cromático del grafo $K(n, k)$ es $n - 2k + 2$ siempre que $n \geq 2k$. La demostración de Lovász de 1978 [7] utiliza el siguiente resultado topológico conocido como teorema de Borsuk-Ulam. [8]

Teorema 3.1.1 *Si la esfera unitaria en \mathbb{R}^n es expresada como la unión de n conjuntos abiertos, entonces uno de los conjuntos contiene un par antipodal de puntos.*

Donde un par de puntos $\{x, y\}$ en la esfera unitaria en \mathbb{R}^n es antipodal si $y = -x$.

El siguiente teorema de Erdős-Ko-Rado [3] caracteriza los conjuntos maximales independientes en $K(n, k)$.

Teorema 3.1.2 *Si $n > 2k$, entonces $\alpha(K(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$. Un conjunto independiente de tamaño $\binom{n-1}{k-1}$ consiste en los k -subconjuntos de $[n]$ que contienen un punto particular.*

Resultado que permite demostrar el siguiente corolario. [4]

Corolario 3.1.3 *El grupo de automorfismos del grafo de Kneser, $\text{Aut}(K(n, k))$, para $n \geq 2k + 1$, es el grupo simétrico de n letras, con la acción inducida por las permutaciones en $[n]$.*

En 2005 Valencia-Pabon y Vera [12] demostraron el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4 *Sean n y k enteros positivos. Entonces, el diámetro del grafo de Kneser $K(2k + n, k)$ es igual a $\lceil \frac{k-1}{n} \rceil + 1$.*

Más recientemente, en 2018, Agong, Amarra, Caughman, Herman y Terada [1] demostraron el siguiente resultado.

Teorema 3.1.5 *Sean n y k enteros positivos tal que $n > 2k$. Entonces, la cintura del grafo de Kneser $K(n, k)$ es dada por*

$$g(K(n, k)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \geq 3k; \\ 4 & \text{si } n < 3k \text{ y } (n, k) \neq (2k + 1, k); \\ 5 & \text{si } (n, k) = (5, 2); \\ 6 & \text{si } (n, k) = (2k + 1, k) \text{ y } k > 2. \end{cases}$$

3.2. Grafo estable de Kneser

El *grafo estable de Kneser* $K_{stab}(n, k)$ tiene como conjunto de vértices $S \subset \binom{[n]}{k}$ tal que $1 < |i - j| < n - 1$ para todo par $i, j \in S$, y aristas entre vértices disjuntos.

Es decir, el grafo estable de Kneser es un subgrafo del grafo de Kneser $K(n, k)$ inducido por los k -subconjuntos estables de $[n]$, es decir, aquellos subconjuntos que no posean cualquier 2-subconjunto de la forma $\{i, i + 1\}$ o $\{1, n\}$.

Por ejemplo, partiendo del grafo de Petersen, el grafo de Kneser $K_{stab}(5, 2)$, se obtiene al eliminar los vértices $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3\}$ y $\{4, 5\}$ ya que $|i - j| = 1$, y el vértice $\{1, 5\}$ por ser $|i - j| = 4 = 5 - 1$. Ilustrado en la Figura 3.3.

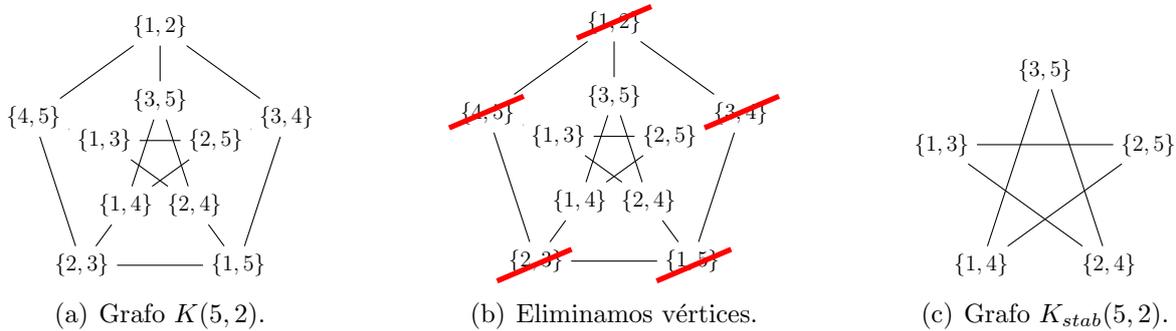


Figura 3.3: Grafo $K_{stab}(5, 2)$.

Kaplansky demostró en 1945 [6] que el grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ posee $\frac{n}{n - k} \cdot \binom{n-k}{k}$ vértices.

A. Schrijver probó en 1978 [10], nuevamente utilizando el teorema de Borsuk-Ulam que el número cromático de $K_{stab}(n, k)$ es $n - 2k + 2$, además probó que los grafos estables de Kneser son vértice críticos, es decir, el número cromático de cualquier subgrafo propio de $K_{stab}(n, k)$ es estrictamente menor que $n - 2k + 2$; por esta razón, los grafos estables de Kneser son también conocidos como los grafos de Schrijver.

B. Braun demostró en 2010 [2] el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 Para $n \geq 2k + 1$ y $k \geq 2$ el grupo de automorfismos de $K_{stab}(n, k)$ es isomorfo al grupo diedral de orden $2n$.

Es interesante notar que la demostración se divide en dos partes, $n \neq 2k + 2$ y $n = 2k + 2$. El caso $n = 2k + 2$ es el más largo, e implica un estudio minucioso del grafo.

El grafo $K_{stab}(2k, k)$ es isomorfo a K_2 , ver Figura 3.4 (a) ; el grafo $K_{stab}(2k + 1, k)$ es un ciclo, ver Figura 3.4 (b).

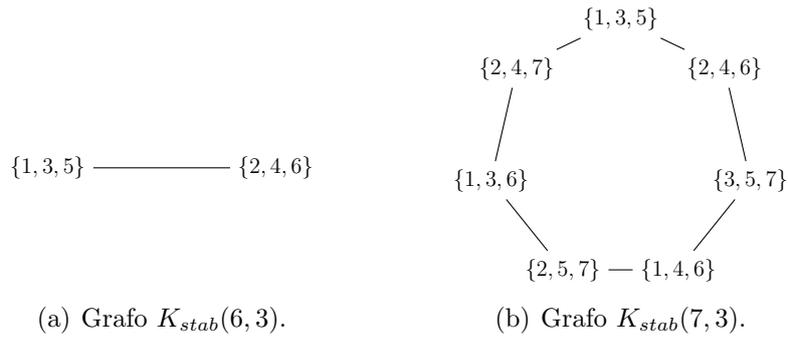


Figura 3.4: Grafos estables de Kneser.

A pesar de haber sido introducidos en 1978, aún se sabe muy poco sobre esta familia interesante de grafos. Es por esto que decidimos estudiarla con un poco más de profundidad.

Capítulo 4

Ejemplos

En este capítulo daremos algunos ejemplos de grafos estables de Kneser y encontraremos ciclos de Hamilton en los mismos.

Dado $K_{stab}(2k + 2, k)$, y sea $v \in V(K_{stab}(2k + 2, k))$ un vértice del grafo, para poder visualizar mejor los vértices y sus adyacencias, pensaremos que v es una sucesión de $2k + 2$ elementos, ordenados desde la posición 1 a la posición $2k + 2$ (la cual esta conectada a la primera posición).

Además k de las posiciones serán ocupadas por “ x ” las cuales no serán consecutivas, ya que el grafo es estable, el resto de los lugares serán espacios en blanco.

Así, por ejemplo, el vértice $\{1, 3, 6\}$ de $K_{stab}(8, 3)$ lo representamos como una grilla en la cual las posiciones 1, 3 y 6 son marcadas con una “ x ”. Ver Figura 4.1.

$\{1, 3, 6\}$	x		x			x		
	1	2	3	4	5	6	7	8

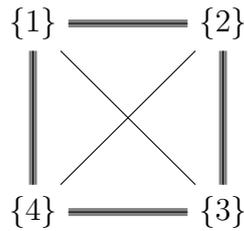
Figura 4.1: Grilla del vértice $\{1, 3, 6\}$.

4.1. Grafo estable de Kneser $K_{stab}(4, 1)$

Analizaremos primero el grafo estable de Kneser $K_{stab}(4, 1)$. Comenzamos realizando una tabla en la que cada fila representa la grilla correspondiente a cada vértice del grafo, como la del Cuadro 4.1. Luego dibujamos el grafo, y finalmente, acomodando los vértices vemos que el grafo posee el ciclo de Hamilton $(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})$. Ver la Figura 4.2.

	1	2	3	4
vértice $\{1\}$	x			
vértice $\{2\}$		x		
vértice $\{3\}$			x	
vértice $\{4\}$				x

Cuadro 4.1: Construcción de $K_{stab}(4, 1)$.

Figura 4.2: Grafo $K_{stab}(4,1)$.

4.2. Grafo estable de Kneser $K_{stab}(6,2)$

Analizamos el grafo estable de Kneser $K_{stab}(6,2)$. Así como en el ejemplo anterior, comenzamos realizando una tabla como la del Cuadro 4.2. Allí identificamos dos tipos de vértices, los que tienen un espacio de tamaño 3 identificados en la grilla con color rojo y los que tienen dos espacios de tamaño 2 en color amarillo.

	1	2	3	4	5	6
vértice $\{1,3\}$	x		x			
vértice $\{2,4\}$		x		x		
vértice $\{3,5\}$			x		x	
vértice $\{4,6\}$				x		x
vértice $\{1,5\}$	x				x	
vértice $\{2,6\}$		x				x
vértice $\{1,4\}$	x			x		
vértice $\{2,5\}$		x			x	
vértice $\{3,6\}$			x			x

Cuadro 4.2: Construcción de $K_{stab}(6,2)$.

Además, el subgrafo inducido por los vértices de espacio de tamaño 3 es el bipartito completo $K_{3,3}$, como observamos en la Figura 4.3 (a) ; y el subgrafo inducido por los vértices de dos espacios de tamaño 2 es el ciclo C_3 , como en la Figura 4.3 (b).

Notamos que dado un vértice de espacio de tamaño 3, si efectuamos una rotación a la derecha en la grilla correspondiente, es decir, si movemos las “x” una posición a la derecha (cíclicamente), obtenemos un vecino, ya que la intersección de ambos vértices es vacía por ser un grafo estable de Kneser. De este modo, por medio de rotaciones en la grilla, pasamos por todos los vértices de la categoría, y además, formamos un ciclo en el subgrafo inducido por los vértices de espacio de tamaño 3.

A continuación dibujamos el grafo, y luego de reacomodar los vértices vemos que posee un ciclo de Hamilton, como en la Figura 4.3 (c).

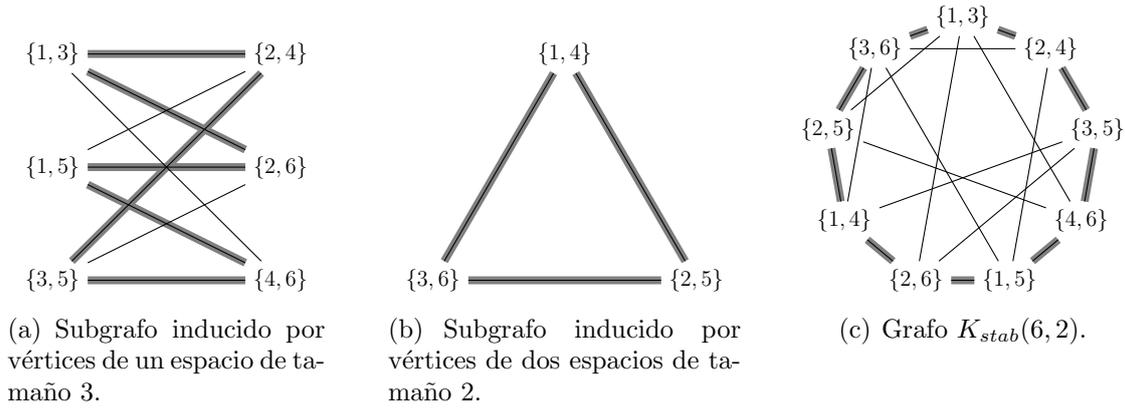


Figura 4.3: Grafo $K_{stab}(6, 2)$.

4.3. Grafo estable de Kneser $K_{stab}(8, 3)$

Analizaremos $K_{stab}(8, 3)$ para encontrar un ciclo del Hamilton.

Luego de realizar la grilla como en los casos anteriores (ver Cuadro 4.3), identificamos dos tipos de vértices, los que tienen un espacio de tamaño 3 identificados en la grilla con color rojo y los que tienen dos espacios de tamaño 2 en color amarillo.

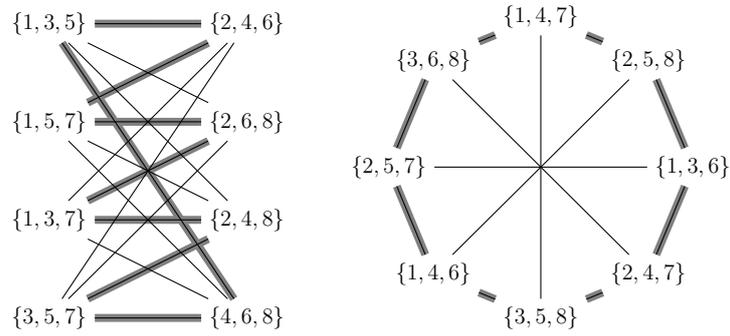
	1	2	3	4	5	6	7	8
vértice $\{1, 3, 5\}$	x		x		x			
vértice $\{2, 4, 6\}$		x		x		x		
vértice $\{3, 5, 7\}$			x		x		x	
vértice $\{4, 6, 8\}$				x		x		x
vértice $\{1, 5, 7\}$	x				x		x	
vértice $\{2, 6, 8\}$		x				x		x
vértice $\{1, 3, 7\}$	x		x				x	
vértice $\{2, 4, 8\}$		x		x				x
vértice $\{1, 4, 7\}$	x			x			x	
vértice $\{2, 5, 8\}$		x			x			x
vértice $\{1, 3, 6\}$	x		x			x		
vértice $\{2, 4, 7\}$		x		x			x	
vértice $\{3, 5, 8\}$			x		x			x
vértice $\{1, 4, 6\}$	x			x		x		
vértice $\{2, 5, 7\}$		x			x		x	
vértice $\{3, 6, 8\}$			x			x		x

Cuadro 4.3: Construcción de $K_{stab}(8, 3)$.

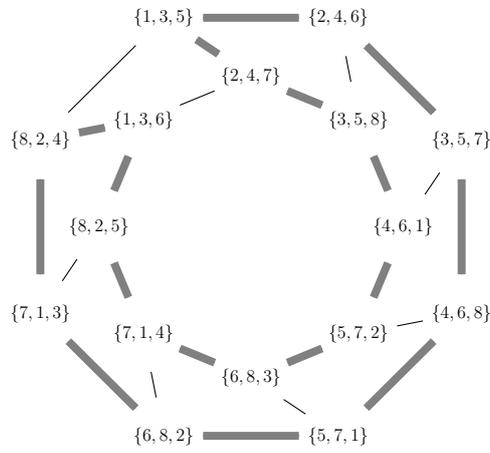
Además, el subgrafo inducido por los vértices de espacio de tamaño 3 es el bipartito completo $K_{4,4}$, como observamos en la Figura 4.4 (a); y el subgrafo inducido por los vértices de dos espacios de tamaño 2 es el ciclo de tamaño 8 con las antípodas unidas, como en la Figura 4.4 (b).

Notamos, al igual que en el caso anterior, que al efectuar rotaciones en los vértices de la categoría de espacios de tamaño 3, pasamos por todos los vértices de la misma, formando un ciclo.

A continuación dibujamos el subgrafo del grafo $K_{stab}(8, 3)$, donde reacomodamos los vértices y vemos que posee un ciclo de Hamilton, como en la Figura 4.4 (c).



(a) Subgrafo inducido por vértices de un espacio de tamaño 3. (b) Subgrafo inducido por vértices de dos espacios de tamaño 2.



(c) Subgrafo de $K_{stab}(8, 3)$.

Figura 4.4: Grafo $K_{stab}(8, 3)$.

Capítulo 5

Resultados Principales

En este capítulo probamos que el grafo estable de Kneser, $K_{stab}(2k + 2, k)$, tiene un ciclo de Hamilton para todo k .

Comenzaremos caracterizando los vértices por sus espacios, obteniendo subgrafos. Luego, obtendremos un ciclo de Hamilton para cada subgrafo, y finalmente conectaremos los ciclos en el grafo original.

Cabe destacar que todos los resultados de este capítulo son originales.

5.1. Caracterización de los vértices

A continuación caracterizaremos los espacios en blanco de cada grilla. Notamos que en una grilla hay “ k ” lugares ocupados por “ x ”, y cada una de éstas es seguida de al menos un espacio vacío. En los ejemplos del capítulo anterior habían vértices con un hueco de tamaño 3, o vértices con dos huecos de tamaño 2, los cuales llamaremos bloques. Lo primero que haremos es demostrar que éstas son las únicas posibilidades.

Primero vemos que no existen bloques de 4 espacios o más. Como tenemos “ k ” posiciones ocupadas por “ x ” y al menos “ k ” espacios vacíos (cada espacio a la derecha de cada “ x ”), si tuviéramos un bloque de tamaño 4 y el resto de tamaño al menos 1, entonces tendríamos al menos $k + k - 1 + 4$ espacios en la grilla, donde la primer k representa las “ x ”, $k - 1$ los espacios de tamaño al menos 1, y el 4 es espacio de al menos 4; pero $k + k - 1 + 4 = 2k + 3 > 2k + 2$ lo cual es absurdo, por lo tanto solo existen bloques de 1, 2 o 3 espacios.

Luego vemos que no existen tres bloques de 2 espacios o más. Como “ k ” posiciones son ocupadas por “ x ” y hay al menos “ k ” espacios vacíos, si tuviéramos tres bloques de 2 espacios y el resto de tamaño al menos 1, entonces los lugares en la grilla serían al menos $k + 2 + 2 + 2 + k - 3 = 2k + 3 > 2k + 2$. Por lo tanto existen a lo más dos bloques de 2 espacios.

Vemos que no existen dos bloques de 3 espacios o más. Como “ k ” posiciones son ocupadas por “ x ” y hay al menos “ k ” espacios vacíos, si tuviéramos dos bloques de 3 espacios y el resto de tamaño al menos 1, entonces los lugares en la grilla serían al menos $k + 3 + 3 + k - 2 = 2k + 4 > 2k + 2$. Luego existe a lo más un bloque de 3 espacios.

No existen vértices con un bloque de 3 espacios y un bloque de 2 espacios o más. Como “ k ” posiciones son ocupadas por “ x ” y hay al menos “ k ” espacios vacíos, si tuviéramos un bloque de 3 espacios, un bloque de 2 espacios y el resto de tamaño al menos 1, entonces los lugares en la grilla serían al menos $k + 3 + 2 + k - 2 = 2k + 3 > 2k + 2$. Luego, solo existen un bloque de 3 espacios o dos bloques de 2 espacios en un mismo vértice.

Por lo que acabamos de demostrar el siguiente resultado.

Lema 5.1.1 *Los vértices de $K_{stab}(2k+2, k)$ tienen o un bloque de 3 espacios o dos bloques de 2 espacios.*

5.2. Distancia entre bloques

Motiva definir formalmente la distancia entre bloques el hecho de que como el último lugar en una grilla está conectado con el primero, entre los dos bloques de 2 espacios habría dos distancias posibles.

Por ejemplo, en el vértice $\{1, 3, 6, 9\} \in V(K_{stab}(10, 4))$, cuya grilla observamos en la Figura 5.1, los bloques $[4,5]$ y $[7,8]$ pueden estar a distancia 1, porque el 5 y el 7 están separados por el 6, o a distancia 5, porque el 8 y el 4 están separados por 9, 10, 1, 2 y 3.

$$\{1, 3, 6, 9\} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline X & & X & & & X & & & X & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline \end{array}$$

Figura 5.1: Grilla del vértice $\{1, 3, 6, 9\}$.

Definición 5.2.1 *La distancia entre dos bloques de 2 espacios, en los vértices de $K_{stab}(2k+2, k)$, es la menor de las dos cantidades de posiciones encerradas entre ambos bloques.*

Por lo que $\{1, 3, 6, 9\}$ tiene dos bloques de tamaño 2 a distancia 1.

5.3. Observaciones

El total de posiciones en una grilla es $2k + 2$, por lo tanto es par. Luego, cuando hay dos bloques de 2 espacios, las cantidades de posiciones entre los bloques son ambas pares o ambas impares. Sin embargo, como entre dos bloques de 2 espacios hay l posiciones ocupadas con “ x ”, y $l - 1$ espacios, entonces entre dos bloques hay $l + l - 1 = 2l - 1$ elementos. Por lo tanto ambas cantidades deben ser impares. Por lo que probamos el siguiente lema.

Lema 5.3.1 *La distancia entre dos bloques de 2 espacios, en los vértices de $K_{stab}(2k + 2, k)$, es impar.*

Si k es par, la distancia máxima entre dos bloques de dos espacios es $k - 1$. Si k es impar, la distancia máxima es $k - 2$. Luego, la mayor distancia entre dos bloques de dos espacios es: $2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1$. Donde $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ es la cantidad de “ x ” y $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1$ la cantidad de espacios entre estos bloques.

Por lo mencionado, obtenemos el siguiente lema, que caracteriza la distancia entre dos bloques de 2 espacios.

Lema 5.3.2 *Las distancias posibles entre dos bloques de 2 espacios, en los vértices de $K_{stab}(2k + 2, k)$, son los impares i tales que $1 \leq i \leq 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1$.*

5.4. Ciclos de Hamilton por categorías

En esta sección clasificamos los vértices del grafo estable de Kneser $K_{stab}(2k+2, k)$ en categorías, para obtener mayor información estructural del grafo. En las secciones siguientes, utilizaremos esta información para demostrar su hamiltonicidad.

Definición 5.4.1 *B3 es el subgrafo de $K_{stab}(2k+2, k)$ generado por los vértices con un bloque de 3 espacios.*

Dado un vértice en B3, si la primera posición ocupada es un número par, los próximos también lo serán, ya que solo existen bloques de tamaño 1 o 3 en este grafo. Análogamente, si comienza con un impar, el resto de las entradas serán también impares. Por lo tanto, los vértices de este grafo pueden ser clasificados en pares o impares.

Teorema 5.4.2 *B3 es isomorfo al bipartito completo $K_{k+1, k+1}$.*

Demostración. Observamos en primer lugar que todos los vértices pares serán vecinos de todos los vértices impares, ya que la intersección de un vértice par y uno impar es vacía.

Por otra parte, no existen aristas conectando vértices de una misma paridad. Esto se debe a que existen $k+1$ números de una misma paridad en $[2k+2]$, y no hay forma de obtener dos k -subconjuntos disjuntos entre $k+1$ elementos. Por lo tanto cualquier par de vértices de la misma paridad interseca en $k-1$ elementos.

Concluimos que B3 es isomorfo al bipartito completo $K_{k+1, k+1}$, donde la partición de los vértices está dada por los $k+1$ vértices pares y los $k+1$ vértices impares. \square

Corolario 5.4.3 *B3 posee $2k+2$ vértices.*

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que B3 es isomorfo al bipartito completo $K_{k+1, k+1}$, y además, el orden de $K_{k+1, k+1}$ es $2k+2$. \square

A continuación, damos una definición y dos lemas que serán de utilidad para probar la hamiltonicidad de B3.

Definición 5.4.4 *Sea $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, con $x_1, x_2, \dots, x_k \in [2k+2]$, un vértice del grafo $K_{stab}(2k+2, k)$. Definimos la rotación del vértice v como el vértice $r(v) = \{x_1+1, x_2+1, \dots, x_k+1\}$, con la convención de que $2k+2+1 = 1$. Es decir, es la acción de rotar cada posición en la grilla del vértice una posición a la derecha cíclicamente.*

Lema 5.4.5 *Si v es un vértice del grafo $K_{stab}(2k+2, k)$, entonces $vr(v)$ es una arista del grafo.*

Demostración. Sean $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ y $r(v) = \{x_1+1, x_2+1, \dots, x_k+1\}$ dos vértices del grafo $K_{stab}(2k+2, k)$, la intersección de v con $r(v)$ es vacía ya que ambos son vértices estables. \square

Así, para el vértice $v_1 = \{2, 4, 6, 10\} \in V(K_{stab}(10, 4))$ tenemos $v_2 = r(v_1) = \{1, 3, 5, 7\}$. Además v_1 es vecino de v_2 ya que su intersección es vacía. Ver Figura 5.2.

utiliza todos los vértices de B_3 . Es decir, el grafo B_3 posee un ciclo de Hamilton. \square

A los vértices con dos bloques los dividiremos según las distancias entre estos. Además, dejaremos para después los que tengan los dos bloques a distancia máxima.

Definición 5.4.8 B_{2Di} es el subgrafo de $K_{stab}(2k+2, k)$ generado por los vértices con dos bloques de 2 espacios a distancia i , para $i < k - 2$.

Por ejemplo, B_{2D1} es el subgrafo de $K_{stab}(2k+2, k)$ generado por los vértices en los cuales se encuentran dos bloques de 2 espacios a distancia 1.

A diferencia del caso anterior, para el grafo B_{2Di} , primero mostraremos que posee un ciclo de Hamilton, y como corolario tendremos la cantidad de vértices del grafo.

Teorema 5.4.9 B_{2Di} posee un ciclo de Hamilton.

Demostración. En esta categoría existe

$$v_1 = \begin{array}{ccccccc} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{X} & \cdots & \boxed{X} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{X} & \cdots & \boxed{X} \\ 1 & 2 & 3 & & i+1 & & i+4 & & 2k+2 \end{array}$$

al mismo le aplicamos una rotación

$$r(v_1) = v_2 = \begin{array}{ccccccc} \boxed{X} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{X} & \cdots & \boxed{X} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{X} & \cdots & \boxed{} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & i+2 & & i+5 & & 2k+2 \end{array}$$

luego, cada “ x ” rotó una posición a la derecha, además, como el grafo es estable, no existen “ x ” consecutivas, por lo que v_1 y v_2 son vecinos ya que su intersección es vacía.

Así, como en el caso anterior, cada rotación nos da un vecino nuevo distinto a los anteriores, y en la rotación $2k+2$ -ésima obtenemos v_1 cerrando así el ciclo de Hamilton para B_{2Di} con i cualquier impar tal que $i < k - 2$. \square

Corolario 5.4.10 B_{2Di} posee $2k+2$ vértices.

Demostración. Se deduce del teorema anterior, y de que se necesitaron $2k+2$ rotaciones para pasar por todos los vértices del grafo sin repetir. \square

Definición 5.4.11 $B_{2Dmáx}$ es el subgrafo de $K_{stab}(2k+2, k)$ generado por los vértices con dos bloques de 2 espacios a distancia i , para $i \geq k - 2$.

Este grafo será tratado de modo similar al anterior, con la excepción de que jugará un rol importante la paridad de k .

Lema 5.4.12 Si k es par $B_{2Dmáx}$ posee $k+1$ vértices. Si k es impar $B_{2Dmáx}$ posee $2k+2$ vértices.

Demostración. Si k es par, en el grafo $B2D_{\max}$ los bloques de 2 espacios están separados por $k - 1$ posiciones a ambos lados. Es decir, dado un bloque de 2 espacios, a su derecha hay $k - 1$ posiciones, seguidas del otro bloque de 2 espacios, y a su derecha otras $k - 1$ posiciones, a las cuales le siguen el primer bloque; todo esto pensando la grilla cíclicamente (la última posición conectada a la primera).

Luego, sea v el vértice de $B2D_{\max}$ tal que las dos primeras posiciones contienen un bloque de 2 espacios, entonces el segundo bloque ocupa las posiciones $k + 2$ y $k + 3$.

Realizando rotaciones consecutivas a v , vemos que en la rotación $k + 1$ -ésima el segundo bloque ocupa las dos primeras posiciones, obteniendo así v nuevamente. De donde concluimos que el grafo $B2D_{\max}$ posee $k + 1$ vértices cuando k es par.

Para k impar, el análisis es similar al de $B2Di$. \square

Teorema 5.4.13 $B2D_{\max}$ posee un ciclo de Hamilton.

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 5.4.9 teniendo en cuenta el lema anterior. \square

5.5. Conexiones entre clases

En esta sección brindaremos información acerca de las conexiones entre clases en el grafo estable de Kneser $K_{stab}(2k + 2, k)$, y diremos a qué son isomorfos los grafos $B2Di$ y $B2D_{\max}$.

Dado un vértice en $B3$, su vecino en $B2D1$ (en el grafo original) será aquel con una “ x ” en la posición central del bloque de 3 espacios, alrededor de la cual se encontraran los dos bloques de 2 espacios. Como podemos observar en la Figura 5.4.

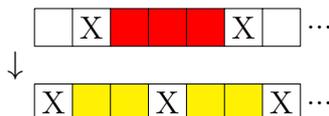


Figura 5.4: Vértice en $B3$ y su vecino en $B2D1$.

Teorema 5.5.1 Cada vértice en $B3$ tiene exactamente un vecino en $B2D1$.

Demostración. Dado un vértice en $B3$, el mismo consiste de números pares o impares. Supongamos sin pérdida de generalidad que tiene los pares. Luego su vecino en $B2D1$ tiene todos los números impares fuera del bloque de 3 espacios, y posee el único número par dentro del bloque de 3. Además, esta es la única forma de obtener un vecino en $B2D1$ de un vértice en $B3$. \square

La Figura 5.5 ilustra como obtener un vecino en $B2D3$ de un vértice en $B2D1$.

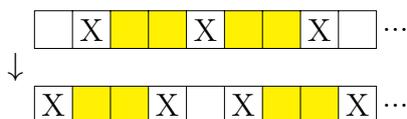


Figura 5.5: Vértice en $B2D1$ y su vecino en $B2D3$.

Teorema 5.5.2 *Cada vértice en $B2D1$ tiene un vecino en $B3$ y un vecino en $B2D3$.*

Demostración. Cualquier vértice en $B2D1$ consta de números pares o impares, excepto uno con la paridad opuesta.

Además, alrededor del número de paridad opuesta tenemos los dos bloques de 2 espacios. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todos los números son pares excepto uno, que es impar.

Para encontrar el vecino en $B2D3$ tomamos todos los números impares, excepto el impar encerrado entre los dos bloques de 2 espacios, y excepto los impares pertenecientes a los bloques.

Por lo tanto, hemos tomado $k - 2$ números. Los dos restantes, serán los dos números pares pertenecientes a los dos bloques de 2 espacios.

Como los bloques de 2 espacios separan paridad, y en este caso, hay dos números pares y el resto impares, y además, como los dos pares están separados por un espacio en blanco, tenemos que la distancia entre los dos bloques de 2 espacios es 3. Luego, estos k números forman un vértice que es vecino al vértice de $B2D1$ y además pertenece a $B2D3$. \square

Dado un vértice en $B2Di$, las posiciones que están encerradas *dentro* de los dos bloques de 2 espacios serán las i posiciones que definen la distancia de estos bloques. El bloque a la izquierda de estas posiciones será el *primer bloque*, y el bloque a la derecha el *segundo bloque*. Además las posiciones que están encerradas *fuera* de los dos bloques de 2 serán las $2k + 2 - i - 4$ posiciones restantes.

Teorema 5.5.3 *$B2Di$ es isomorfo al ciclo C_{2k+2} .*

Demostración. Basta probar que cada vértice v en $B2Di$ tiene grado dos, y que sus únicos vecinos son $r(v)$ y $r^{-1}(v)$. Se utiliza fuertemente que $i < k - 2$.

Como los bloques de 2 espacios separan paridad, para obtener un vecino de v en $B2Di$ debemos tomar las paridades opuestas dentro y fuera de los bloques, tomando así $k - 2$ números.

Los dos números restantes tienen que ser elegidos de los dos bloques de dos espacios, con la restricción que solo se puede elegir una posición por bloque, para que sea estable.

Si tomamos la primera posición de cada bloque, obtenemos el vértice $r(v)$, y si tomamos la segunda posición de cada bloque, obtenemos el vértice $r^{-1}(v)$.

Si tomamos la primera posición del primer bloque, y la segunda posición del segundo, vemos que la distancia entre los bloques disminuye en 2, por lo tanto, el vértice resultante no pertenece al mismo grafo.

Finalmente si tomamos la segunda posición del primer bloque, y la primera posición del segundo, como $i < k - 2$ vemos que la distancia entre los bloques aumenta en 2, por lo tanto, el vértice resultante no pertenece al mismo grafo. Demostrando así el teorema. \square

Dado un vértice en $B2D3$ supongamos que dentro de los dos bloques de 2, en los tres lugares, tenemos dos números impares (los cuales forman al vértice) y fuera de los dos bloques de 2, tenemos que los elementos del vértice son solo números pares.

Luego, para obtener un vecino de este vértice en $B2D5$ debemos tomar las posiciones pares encerradas dentro de los dos bloques, las impares fuera y además la segunda posición del primer bloque, y la primera del segundo bloque. Este proceso es ilustrado en la Figura 5.6.

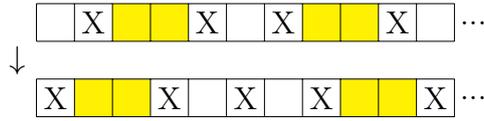


Figura 5.6: Vértice en $B2D3$ y su vecino en $B2D5$.

Teorema 5.5.4 *Cada vértice en $B2Di$, con $3 \leq i < k - 2$, tiene un vecino en $B2D(i - 2)$ y un vecino en $B2D(i + 2)$.*

Demostración. La demostración es análoga a las dos anteriores. Como los bloques de 2 espacios separan paridad, basta con tomar las paridades opuestas dentro y fuera de los bloques, y colocar una “x” en la segunda posición del primer bloque, y otra en la primer posición del segundo. \square

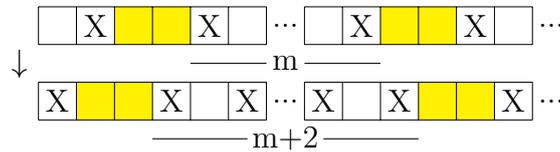


Figura 5.7: Vértice en $B2Dm$ y su vecino en $B2Dm + 2$.

Teorema 5.5.5 *Si k es par $B2Dm_{\max}$ es isomorfo al ciclo C_{k+1} . Si k es impar $B2Dm_{\max}$ es isomorfo a un ciclo de $2k + 2$ vértices con las antípodas unidas.*

Demostración. Por el Lema 5.4.12 sabemos que si k es par $B2Dm_{\max}$ posee $k + 1$ vértices, y que si k es impar $B2Dm_{\max}$ posee $2k + 2$ vértices.

Si k es par, la demostración es análoga a la del Teorema 5.5.3, teniendo en cuenta que para el caso en el que toma la segunda posición del primer bloque, y la primera posición del segundo, vemos que la distancia entre los bloques también disminuye en 2, y por lo tanto, el vértice resultante no pertenece al mismo grafo.

Si k es impar, siguiendo la demostración del Teorema 5.5.3 cuando tomamos la segunda posición del primer bloque, y la primera posición del segundo, notamos que la distancia entre los bloques en lugar de aumentar en 2 se mantiene, obteniendo así, la antípoda del vértice original. \square

Teorema 5.5.6 *Si k es par cada vértice en $B2Dm_{\max}$ tiene dos vecinos en $B2D(k - 3)$. Si k es impar cada vértice en $B2Dm_{\max}$ tiene un vecino en $B2D(k - 2)$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la demostración del teorema anterior. \square

5.6. Ciclo de Hamilton en $K_{stab}(2k + 2, k)$

En esta sección explicamos como unir los ciclos de los subgrafos para obtener un ciclo de Hamilton para $K_{stab}(2k + 2, k)$.

Dados dos ciclos disjuntos, la construcción se basa en buscar un ciclo de tamaño 4 que interseque en una arista a cada ciclo. Luego, la diferencia simétrica es el ciclo que pasa por todos los vértices.

Como consecuencia de los Teoremas 5.5.1, 5.5.2, 5.5.4 y 5.5.6, podemos asegurar que solo existen conexiones entre grupos consecutivos, como ilustramos en el siguiente gráfico.



Teorema 5.6.1 *El grafo estable de Kneser $K_{stab}(2k + 2, k)$, posee un ciclo de Hamilton.*

Demostración. Dado un vértice v_1 en B3, por el Teorema 5.5.1, vemos que existe v_2 en B2D1 tal que v_1 es adyacente a v_2 en el grafo $K_{stab}(2k + 2, k)$.

Sea $r(v_1)$ la rotación del vertice v_1 el cual pertenece a B3, y sea $r(v_2)$ la rotación del vertice v_2 el cual pertenece a B2D1, luego, por el Lema 5.4.6 vemos que $r(v_1)$ y $r(v_2)$ son también adyacentes en el grafo original.

Luego, si quitamos la arista $v_1r(v_1)$ en el ciclo de Hamilton de B3, y la arista $v_2r(v_2)$ en el ciclo de Hamilton de B2D1, vemos que existe un ciclo de Hamilton en el subgrafo de $K_{stab}(2k + 2, k)$ inducido por el conjunto de vértices de $B3 \cup B2D1$.

Dado un vértice $w_1 \neq v_2$ en B2D1, por el Teorema 5.5.2, vemos que existe w_2 en B2D3 tal que w_1 es adyacente a w_2 en el grafo $K_{stab}(2k + 2, k)$.

Sea $r(w_1)$ la rotación del vertice w_1 el cual pertenece a B2D1, y sea $r(w_2)$ la rotación del vertice w_2 el cual pertenece a B2D3, luego, por el Lema 5.4.6 vemos que $r(w_1)$ y $r(w_2)$ son también adyacentes en el grafo original.

Luego, si quitamos la arista $w_1r(w_1)$ en el ciclo de Hamilton del subgrafo de $K_{stab}(2k + 2, k)$ inducido por el conjunto de vértices de $B3 \cup B2D1$, y la arista $w_2r(w_2)$ en el ciclo de Hamilton de B2D3, vemos que existe un ciclo de Hamilton en el subgrafo de $K_{stab}(2k + 2, k)$ inducido por el conjunto de vértices de $B3 \cup B2D1 \cup B2D3$.

Continuando del mismo modo, haciendo uso de los Teoremas 5.5.4 y 5.5.6 concluimos que el grafo estable de Kneser $K_{stab}(2k + 2, k)$, posee un ciclo de Hamilton. \square

Capítulo 6

Otras Observaciones

Recordamos el Teorema 3.2.1, de Braun: Para $n \geq 2k + 1$ y $k \geq 2$ el grupo de automorfismos de $K_{stab}(n, k)$ es isomorfo al grupo diedral de orden $2n$. Observamos que nuestro método nos da un mejor entendimiento del caso $n = 2k + 2$ del que implica este resultado.

Puesto que cualquier automorfismo tiene que fijar $B3$, por el grado de sus vértices, entonces tiene que fijar $B2D1$, y por lo tanto $B2Di$ y $B2Dmáx$.

Además, la imagen de todos los vértices se puede recuperar de la imagen de los vértices en $B2D1$. Ya que si $v \in B2D1$ y conocemos $\phi(v)$, conocemos $\phi(u)$, y $\phi(w)$, para $u \in B3$ y $w \in B2D3$ vecinos de v . Luego, si conocemos $\phi(B2D1)$, conocemos $\phi(B3)$ y $\phi(B2D3)$. Siguiendo la misma idea, si conocemos $\phi(B2D3)$ conocemos $\phi(B2D5)$, y por el mismo razonamiento, tenemos $\phi(B2Di)$ para todo i , y también $\phi(B2Dmáx)$. Por lo tanto el grupo de automorfismos de $K_{stab(2k+2,k)}$ es igual al grupo de automorfismos de $B2D1$, es decir, el grupo de automorfismos de C_{2k+2} .

Por lo que, el grupo de automorfismos de $K_{stab(2k+2,k)}$ es el grupo diedral de orden $2(2k + 2)$.

Por otra parte nos interesa saber si $K_{stab}(n, k)$, con $n \geq 2k + 3$ tiene un ciclo de Hamilton para todo k .

En primer lugar, notamos que podemos hacer el grafo de clases del grafo $K_{stab}(n, k)$, donde cada vértice es una clase, caracterizada por sus bloques de espacios. Así como en la Figura 6.1 (a).

Para dicho grafo existe un árbol generador. El cual es ilustrado en la Figura 6.1 (b).

Además, recordamos que en cada clase podemos encontrar un ciclo que pasa por todos los vértices sin repetir aristas. Luego los vértices del grafo de clase pueden verse como en la Figura 6.1 (c).

Luego, si el grafo de clases $K_{stab}(n, k)$ tiene un árbol generador con $\deg(v) \leq |v|$, es decir, si el grado de cada vértice en el grafo de clases es menor o igual a la cantidad de vértices en esa clase, entonces $K_{stab}(n, k)$ tiene un ciclo de Hamilton. Lo cual se observa en la Figura 6.1 (d).

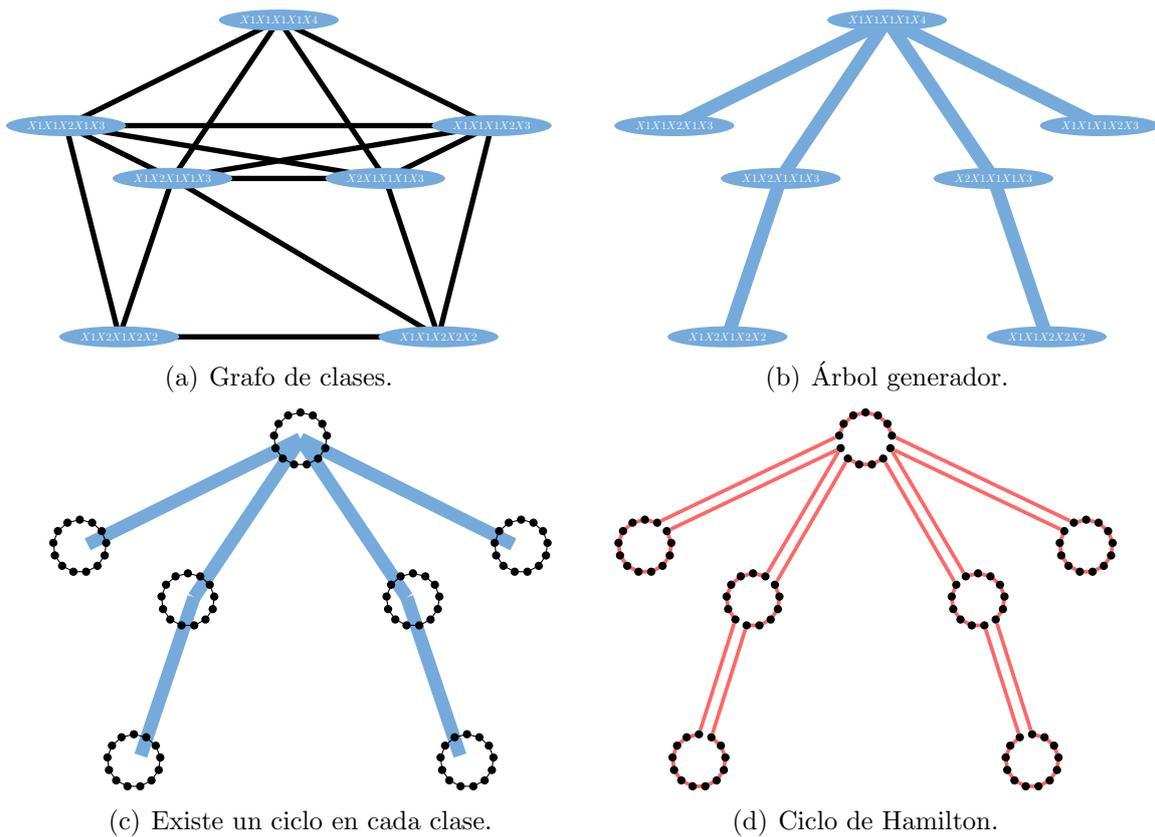


Figura 6.1: Grafo $K_{stab}(n, k)$ con $n \geq 2k + 3$.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo estudiamos los grafos de Kneser y los grafos estables de Kneser.

En particular demostramos que los grafos estables de Kneser $K_{\text{stab}(2k+2,k)}$ poseen un ciclo de Hamilton.

Esto nos deja como posible trabajo futuro demostrar que los grafos estables de Kneser $K_{\text{stab}(n,k)}$ poseen un ciclo de Hamilton para $n \geq 2k + 3$. Así como también podremos estudiar otras propiedades para los grafos anteriores.

Además, existe la noción de grafo s -estable de Kneser, $K_{s\text{-stab}(n,k)}$, que tiene como conjunto de vértices $S \subset \binom{[n]}{k}$ tal que $s < |i - j| < n - s$ para todo par $i, j \in S$, y aristas entre vértices disjuntos. Es decir, se obtiene de grafo de Kneser $K(n, k)$ al eliminar los vértices con elementos a distancia s cíclicamente.

Por lo que otro posible trabajo futuro es demostrar que los grafos s -estables de Kneser $K_{s\text{-stab}(n,k)}$ poseen un ciclo de Hamilton; y además podremos estudiar otras propiedades como cintura, diámetro, conjunto independiente máximo, entre otros, para los grafos s -estables de Kneser.

Bibliografía

- [1] L.A Agong, C. Amarra, J.S. Caughman, A.J. Herman y T.S. Terada, On the girth and diameter of generalized Johnson graphs, *Discrete Mathematics*, 341 (2018), 138-142.
- [2] B. Braun, Symmetries of the stable Kneser graphs, *Advances in Applied Mathematics*, 45 (2010), 12-14.
- [3] P. Erdős, C. Ko, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math., Oxford* 12 2(1961), 313-320.
- [4] C. Godsil, G Royle, Algebraic Graph Theory, *Grad. Texts in Maths.*, vol. 207, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [5] J. Jonsson, On the chromatic number of generalized stable kneser graphs, *Submitted* (2012).
- [6] I. Kaplansky, Solution oh the “Problème des Ménages”, Harvard University, (1943), 784-785
- [7] L. Lovász, Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy, *J. Combinatorial Theory (A)* **25** (1978), 319-324.
- [8] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam Theorem, *Universitext*, Springer-Verlag, Berlin, (2003).
- [9] F. Meunier, The chromatic number of almost stable Kneser hypergraphs, *J. Combinatorial Theory (A)* **118** (2011), 1820-1828.
- [10] A. Schrijver, Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs, *Nieuw Arch. Wis.* (3) **26** (1978), 454-461.
- [11] J. Talbot, Intersecting families of separated sets, *J. Lond. Math. Soc.* **68** (1) (2003), 37-51.
- [12] M. Valencia-Pabon, J.C. Vera, On the diameter of Kneser graphs, *Discrete Mathematics*, 305 (2005), 383-385.